**1ères Maths Spécialité** **DS $n°4$** **Samedi 5 Avril 2025** **Durée 1h30**

Calculatrice autorisée en **mode examen** **Total sur 20 points**

## Exercice 1 [3 points]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et l'inéquation suivantes :

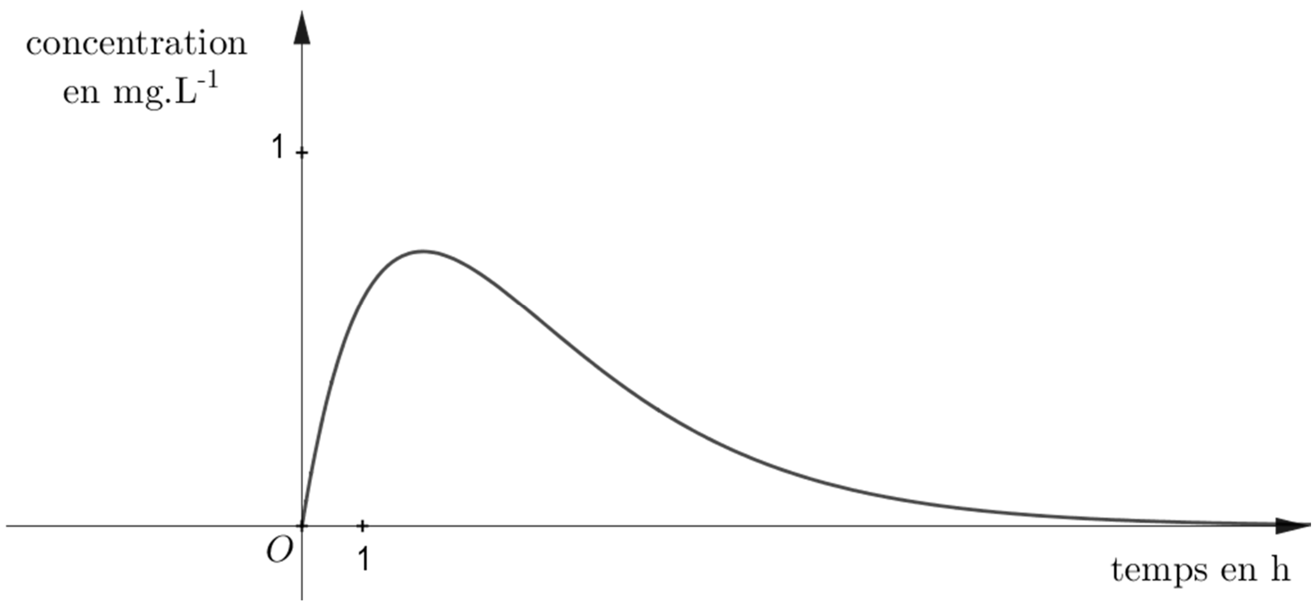
**1.** $e^{-x+2} \times e^{3x-1} < 1$ **2.** $e^{x+1} + e^5 = e^2$ **3.** $e^{x^2-2x} = e^{-1}$

## Exercice 2 [5 points]

La concentration d'un médicament dans le sang en $\mathrm{mg.L^{-1}}$ au cours du temps $t$ exprimé en heure est modélisée par la fonction $f$ définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(t) = te^{-0,5t}$$

On admet que $f$ est dérivable sur $[0;+\infty[$.




**1.** Calculer la valeur exacte de $f(4)$ puis l'arrondi à $0{,}01$ : interpréter dans le contexte de l'exercice.

**2.** Montrer que pour tout $t \in [0;+\infty[$, $f'(t) = (1-0{,}5t)e^{-0,5t}$.

**3.** Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0;+\infty[$.

**4.** Donner le tableau de variations de la fonction $f$ sur $[0;+\infty[$.

**5.** Quelle est la concentration maximale du médicament dans le sang ?
On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi à $10^{-2}$.

**<u>Exercice 3</u> [6 points]**

La suite $(u_n)$est définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 4}{u_n + 1}$$

**1.** <u>BONUS</u> *Cette question n'est pas nécessaires à la compréhension du reste de l'exercice*.

Le programme Python suivant demande à l'utilisateur d'entrer un entier naturel $n$ puis affiche la valeur de $u_n$ :

```
01 U=0
02 n=int(input("n="))
03 for k in range(0, …
04    U= …
05 print(U)
```

Écrire <u>sur la copie</u> les ligne `03` et `04` en les complétant exactement comme elle doivent être tapées en Python.

**2.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$$

**a.** Calculer $v_0$.

**b.** Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique et préciser se raison.

**c.** Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.

**3.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$u_n = 2 \times \frac{3^n - (-1)^n}{3^n + (-1)^n}$$

**<u>Exercice 4</u> [3 points]**

On considère la suite $(u_n)$ telle que, pour tout $n$ entier naturel : $u_n = n\cos(n\pi)$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n)$.
2. Calculer la somme des vingt-cinq premiers termes de la suite $(u_n)$, c'est-à-dire la somme : $u_0 + \cdots + u_{24}$.

**<u>Exercice 5</u> [3 points]**

On considère la suite $(v_n)$ telle que, pour tout $n$ entier naturel : $v_n = \frac{\cos(n)}{n+1}$.

1. Amine affirme : « tous les termes de la suite $(v_n)$ sont positifs ». A-t-il raison ?
2. Béatrice affirme « pour tout $n$ entier naturel non nul, on a : $-\frac{1}{n} < v_n < \frac{1}{n}$ ». A-t-elle raison ?
3. Chen affirme « il existe un entier naturel $n$ tel que : $v_n = 0$ ». A-t-il raison ?

## Corrigé thiaude

### Exercice 1

**1.** $e^{-x+2} \times e^{3x-1} < 1 \Leftrightarrow e^{-x+2+3x-1} < e^0 \Leftrightarrow e^{2x+1} < e^0 \Leftrightarrow 2x+1 < 0 \Leftrightarrow 2x < -1 \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{2}$

$\boldsymbol{S = \left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[}$

**2.** $e^{x+1} + e^5 = e^2 \Leftrightarrow e^{x+1} = e^2 - e^5$. Or, $2 < 5$ donc : $e^2 < e^5$, par conséquent : $e^2 - e^5 < 0$ ; or, pour tout $a \in \mathbb{R}, e^a > 0$, donc l'équation : $e^{x+1} = e^2 - e^5$ n'a pas de solution réelle.
$\boldsymbol{S = \emptyset}$

**3.** $e^{x^2-2x} = e^{-1} \Leftrightarrow x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
$\boldsymbol{S = \{1\}}$

### Exercice 2

Concentration d'un médicament dans le sang en $\mathrm{mg.L^{-1}}$, temps $t$ exprimé en heure
$\forall t \in [0;+\infty[, f(t) = te^{-0,5t}$, on admet que $f$ est dérivable sur $[0;+\infty[$

1. **Calculer la valeur exacte de $f(4)$ puis l'arrondi à $0,01$ : interpréter dans le contexte de l'exercice.**
   $f(4) = 4e^{-0,5\times 4} = \boldsymbol{4e^{-2} \approx 0,54\ arrondi}$ à $\mathbf{0,01}$
   **$4h$ après l'injection du médicament sa concentration est $\approx \boldsymbol{0,54\ mg.L^{-1}}$.**

2. **Montrer que pour tout $t \in [0;+\infty[$, $f'(t) = (1-0,5t)e^{-0,5t}$.**
   $f(t) = te^{-0,5t}$
   Rappel : $(u \times v)' = u' \times v + v' \times u \ \ et \ \ (e^{at+b})' = a\, e^{at+b}$
   $f'(t) = 1 \times e^{-0,5t} + (-0,5)e^{-0,5t} \times t$
   $f'(t) = e^{-0,5t}(1 - 0,5t)$
   $\boldsymbol{\forall t \in [0;+\infty[, f'(t) = (1-0,5t)e^{-0,5t}}$

3. **Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0;+\infty[$.**
   Pour tout $a \in \mathbb{R}, e^a > 0$ donc pour tout $t \in [0;+\infty[, e^{-0,5t} > 0$ par conséquent le signe de $f'(t)$ est celui de $1 - 0,5t$. Or, pour $t \in [0;+\infty[$ on a les équivalences :
   $$1 - 0,5t > 0 \Leftrightarrow -0,5t > -1 \Leftrightarrow 0,5t < 1 \Leftrightarrow t < \frac{1}{0,5} \Leftrightarrow t < 2$$
   Conclusion :
   • **sur $[0;2[$, $f'(t) > 0$** • **sur $]2;+\infty[$, $f'(t) < 0$** • **$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$**

4. **Donner le tableau de variations de la fonction $f$ sur $[0;+\infty[$.**
   Le signe de $f'$ donne le sens de variation de $f$ donc on déduit de la question précédente le tableau de variation :

| $t$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Sens de variation de $f$ | $0$ | ↗ | $\frac{2}{e}$ | ↘ | |

$f(0) = 0e^{-0,5(0)} = 0$
$f(2) = 2e^{-0,5(2)} = 2e^{-1} = \dfrac{2}{e}$

5. **Quelle est la concentration maximale du médicament dans le sang ? On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi à $10^{-2}$.**
   D'après le tableau de variation de $f$, la concentration maximale est $\frac{2}{e} \approx 0,74$
   (atteinte $2h$ après l'injection). La concentration maximale est **environ $\boldsymbol{0,74\ mg.L^{-1}}$**.

**Exercice 3**

$u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n + 4}{u_n + 1}$

**1.** BONUS

```
for k in range(0,n):
    U=(U+4)/(U+1)
```

**2.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$

a. **Calcul de $v_0$**

$$v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 2} = \frac{0 - 2}{0 + 2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$\boldsymbol{v_0 = -1}$

b. **Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique et préciser se raison.**

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 2} = \frac{\dfrac{u_n + 4}{u_n + 1} - 2}{\dfrac{u_n - 2}{u_n + 2} + 2} = \frac{\dfrac{u_n + 4}{u_n + 1} - \dfrac{2(u_n + 1)}{u_n + 1}}{\dfrac{u_n + 4}{u_n + 1} + \dfrac{2(u_n + 1)}{u_n + 1}} = \frac{\dfrac{u_n + 4 - 2(u_n + 1)}{u_n + 1}}{\dfrac{u_n + 4 + 2(u_n + 1)}{u_n + 1}} = \frac{\dfrac{u_n + 4 - 2u_n - 2}{u_n + 1}}{\dfrac{u_n + 4 + 2u_n + 2}{u_n + 1}}$$

$$= \frac{\dfrac{-u_n + 2}{u_n + 1}}{\dfrac{3u_n + 6}{u_n + 1}} = \frac{-u_n + 2}{u_n + 1} \times \frac{u_n + 1}{3u_n + 6} = \frac{-u_n + 2}{3u_n + 6} = \frac{-(u_n - 2)}{3(u_n + 2)} = -\frac{1}{3} \times \frac{u_n - 2}{u_n + 2} = -\frac{1}{3} \times v_n$$

$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = -\frac{1}{3} \times v_n$ et $-\frac{1}{3}$ est une constante donc $(\boldsymbol{v_n})$ **est géométrique de raison** $\boldsymbol{-\frac{1}{3}}$.

c. **Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$(v_n)$ est géométrique donc : $v_n = v_0 \times q^n$, or $v_0 = -1$ et $q = -\frac{1}{3}$, donc :

$$v_n = -1 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n = -\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

**Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, on a :**

$$\boldsymbol{u_n = 2 \times \frac{3^n - (-1)^n}{3^n + (-1)^n}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Avec les notation de l'exercice, on a les équivalences :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2} \Leftrightarrow v_n(u_n + 2) = u_n - 2 \Leftrightarrow v_n u_n + 2v_n = u_n - 2 \Leftrightarrow u_n v_n - u_n = -2 - 2v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -2 - 2v_n \Leftrightarrow u_n = \frac{-2 - 2v_n}{v_n - 1}$$

Or, $v_n = -\left(-\frac{1}{3}\right)^n$, donc :

$$u_n = \frac{-2 - 2\left(-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)}{-\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 1} = \frac{-2 + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{-\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 1} = \frac{-2 + 2 \times (-1)^n \times \frac{1^n}{3^n}}{-(-1)^n \times \frac{1^n}{3^n} - 1}$$

$$= \frac{-2 + 2(-1)^n \times \frac{1}{3^n}}{-(-1)^n \times \frac{1}{3^n} - 1} = \frac{2\left(-1 + \frac{(-1)^n}{3^n}\right)}{-\left(\frac{(-1)^n}{3^n} + 1\right)} = 2 \times \frac{\frac{-1 \times 3^n}{3^n} + \frac{(-1)^n}{3^n}}{-\left(\frac{(-1)^n}{3^n} + \frac{3^n}{3^n}\right)}$$

$$= -2 \times \frac{\frac{-3^n + (-1)^n}{3^n}}{\frac{(-1)^n + 3^n}{3^n}} = -2 \times \frac{-3^n + (-1)^n}{3^n} \times \frac{3^n}{(-1)^n + 3^n}$$

$$= 2 \times \frac{-(-3^n + (-1)^n)}{3^n + (-1)^n} = 2 \times \frac{3^n - (-1)^n}{3^n + (-1)^n}$$

Conclusion :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \times \frac{3^n - (-1)^n}{3^n + (-1)^n}}$$

**Exercice 4**

Pour tout $n$ entier naturel : $u_n = n\cos(n\pi)$.

**1.** Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n)$.

$u_0 = 0\cos(0\pi) = \mathbf{0}$ $\quad u_1 = 1\cos(1\pi) = \cos(\pi) = \mathbf{-1}$ $\quad u_2 = 2\cos(2\pi) = 2 \times 1 = \mathbf{2}$

$u_3 = 3\cos(3\pi) = 3 \times (-1) = \mathbf{-3}$ $\quad u_4 = 4\cos(4\pi) = 4 \times 1 = \mathbf{4}$

**2.** Calculer la somme des vingt-cinq premiers termes de la suite $(u_n)$ : $u_0 + \cdots + u_{24}$.

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - u_5 + \cdots + u_{22} + u_{23} + u_{24} = \underbrace{0 - 1}_{-1} + \underbrace{2 - 3}_{-1} + \underbrace{4 - 5}_{-1} + \cdots + \underbrace{22 - 23}_{-1} + 24$$

$$= (-1) \times 12 + 24 = -12 + 24 = \mathbf{12}$$

**Exercice 5**

On considère la suite $(v_n)$ telle que, pour tout $n$ entier naturel : $v_n = \frac{\cos(n)}{n+1}$.

**1. Amine affirme : « tous les termes de la suite $(v_n)$ sont positifs ». A-t-il raison ?**

On a : $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$, or si $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ alors $\cos(x) < 0$ donc $\cos(2) < 0$, puis $\frac{\cos(2)}{2+1} < 0$, c'est-à-dire $v_2 < 0$.

**Amine se trompe**.

**2. Béatrice affirme « pour tout $n$ entier naturel non nul, on a : $-\frac{1}{n} < v_n < \frac{1}{n}$ ». A-t-elle raison ?**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}, -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc : $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ puis en divisant par $n + 1 > 0$ :

$$-\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{\cos(n)}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $-\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, donc $-\frac{1}{n} < \frac{\cos(n)}{n+1} < \frac{1}{n}$, i.e. $-\frac{1}{n} < v_n < \frac{1}{n}$.

**Béatrice a raison.**

**3. Chen affirme « il existe un entier naturel $n$ tel que : $v_n = 0$ ». A-t-il raison ?**

$$v_n = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos(n)}{n+1} = 0 \Leftrightarrow \cos(n) = 0 \Leftrightarrow \textit{il existe } k \in \mathbb{N}, n = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Or, pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ on a les équivalences :

$$n = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow 2n = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow 2n = (2k+1)\pi \Leftrightarrow \frac{2n}{2k+1} = \pi$$

Le nombre $\pi$ étant irrationnel (ce n'est pas une fraction), il ne peut pas s'écrire $\frac{2n}{2k+1}$ donc $v_n$ n'est jamais nul.

**Chen se trompe.**